

Lời giải đề thi Olympic Toán học Quốc tế IMO 2025

DAY 1

Bài 1. Một đường thẳng trong mặt phẳng tọa độ được gọi là *đường ánh nắng* nếu nó không song song với trục x , trục y hay đường thẳng $x + y = 0$. Cho số nguyên dương $n \geq 3$ cố định. Xác định tất cả các số nguyên không âm k sao cho tồn tại n đường thẳng phân biệt trong mặt phẳng tọa độ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Với mọi số nguyên dương a và b mà $a + b \leq n + 1$, điểm $(a; b)$ nằm trên ít nhất một trong n đường thẳng đó;
- Đúng k trong số n đường thẳng là đường ánh nắng.

Lời giải: Với $n = 3$. Ta có các điểm (a, b) thỏa mãn $a + b \leq n + 1$ và a, b nguyên dương là $A(1, 1)$, $B(1, 2)$, $C(2, 1)$, $D(1, 3)$, $E(3, 1)$, $F(2, 2)$.

Giả sử có 3 đường thẳng d_1, d_2, d_3 trong đó có đúng 2 đường ánh nắng d_2, d_3 . Khi đó mỗi đường trong 2 đường d_2, d_3 chỉ có thể đi qua tối đa 2 điểm (do các đường có thể đi qua 3 điểm là $x = 1, y = 1, x + y = 4$ đều không là đường ánh nắng).

Khi đó d_1 phải đi qua ít nhất 2 điểm. Ta xét 3 trường hợp của d_1 :

TH1: d_1 có dạng $x = c$. Do d_1 đi qua ít nhất 2 điểm nên $c \in \{1, 2\}$.

TH1.1 $c = 1$. Khi đó d_1 đi qua A, B, D và do d_2, d_3 chỉ có thể đi qua tối đa 2 điểm nên ta giả sử d_2 đi qua 2 trong 3 điểm C, E, F .

Tuy nhiên đường nối 2 trong 3 điểm này đều không là đường ánh nắng nên mâu thuẫn.

TH1.2 $c = 2$. Khi đó d_1 đi qua C, F và do d_2, d_3 chỉ có thể đi qua tối đa 2 điểm phải có đường đi qua 2 trong 3 điểm A, B, D . Tuy nhiên đường nối 3 điểm này cũng không là đường ánh nắng nên cũng mâu thuẫn.

TH2: d_1 có dạng $y = c$. Tương tự TH1 ta cũng có mâu thuẫn.

TH3: d_1 có dạng $x + y = c$. Ta cũng cần $c \in \{3, 4\}$.

Nếu $c = 4$, tương tự TH1.1 ta có mâu thuẫn.

Nếu $c = 3$, tương tự TH1.2 ta có mâu thuẫn.

Do đó k không thể bằng 2.

Chọn 3 đường $x + 2y = 5$; $y + 2x = 5$; $x = y$ thì thỏa mãn có $k = 3$ đường ánh nắng

Chọn 3 đường $x = y$; $x = 1$; $y = 1$ thì thỏa mãn có $k = 1$ đường ánh nắng

Chọn 3 đường $x + y = 4$; $x + y = 3$; $x + y = 2$ thì thỏa mãn có $k = 0$ đường ánh nắng

Vậy với $n = 3$, ta được các giá trị k thỏa mãn là $k \in \{0, 1, 3\}$

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n rằng $\forall n \geq 3$, các giá trị k thỏa mãn luôn thuộc tập $\{0, 1, 3\}$

Thật vậy, giả sử khẳng định đúng đến $n = t \geq 3$

Với $n = t + 1$, xét bộ $3t$ điểm $(1, 1), (1, 2), \dots, (1, t + 1); (2, 1), (3, 1), \dots, (t + 1, 1); (2, t), (3, t - 1), \dots, (t, 2)$. Do chỉ có $t + 1$ đường thẳng nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 3 điểm trong $3t$ điểm đó nằm trên cùng 1 đường thẳng.

Mà $3t$ điểm trên đều nằm ở biên của tam giác tạo bởi các đường $x = 1, y = 1, x + y = t + 2$.

Do đó để có 3 điểm trong $3t$ điểm cùng nằm trên 1 đường thẳng thì đường thẳng đó chỉ có thể là 1 trong 3 đường trên.

Do đó 1 trong 3 đường $x = 1, y = 1, x + y = t + 2$ phải thuộc bộ $t + 1$ đường đã cho.

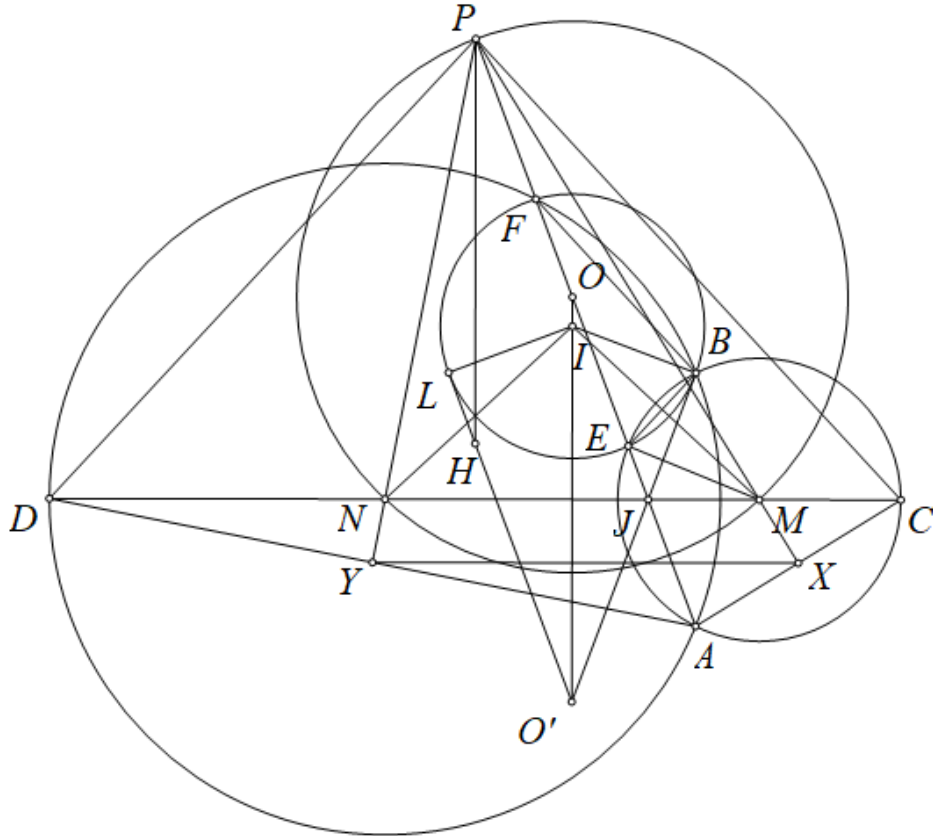
Nếu $x = 1$ hoặc $y = 1$, giả sử là $x = 1$ thuộc bộ $t + 1$ đường đã cho. Khi đó ta loại bỏ đường thẳng này cùng các điểm trên nó và tính tiến trực hoành lên 1 đơn vị thì sẽ quy về trường hợp $n = t$, do đó theo giả thiết quy nạp thì $k \in \{0, 1, 3\}$.

Nếu $x + y = t + 2$ thuộc bộ $t + 1$ đường đã cho. Khi đó ta chỉ cần loại bỏ đường thẳng này cùng các điểm trên nó thì sẽ quy về trường hợp $n = t$ nên theo giả thiết quy nạp ta cũng được $k \in \{0, 1, 3\}$.

Do đó khẳng định đúng với $n = t + 1$ nên theo nguyên lí quy nạp, ta được khẳng định đúng $\forall n \geq 3$.

Vậy $\forall n \geq 3$, các giá trị k thỏa mãn luôn thuộc tập $\{0, 1, 3\}$.

Bài 2. Cho các đường tròn Ω và Γ có tâm tương ứng là M và N sao cho bán kính của Ω nhỏ hơn bán kính của Γ . Giả sử Ω và Γ cắt nhau tại các điểm phân biệt A và B . Đường thẳng MN cắt Ω tại điểm C và cắt Γ tại điểm D , sao cho thứ tự các điểm trên đường thẳng đó lần lượt là C, M, N và D . Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD . Đường thẳng AP cắt lại Ω tại điểm $E \neq A$. Đường thẳng AP cắt lại Γ tại điểm $F \neq A$. Gọi H là trực tâm của tam giác PMN . Chứng minh rằng đường thẳng đi qua H và song song với AP tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BEF .



Lời giải: Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN .

Lấy X, Y là trung điểm AC, AD thì từ giả thiết ta dễ có X, Y thuộc PM, PN .

Do đó ta được $\angle APM = \angle AYX = 90^\circ - \angle PYX = 90^\circ - \angle PNM = \angle OPM$. Suy ra P, O, A thẳng hàng.

Gọi J là giao AP, MN . O' đối xứng của O qua MN . I là tâm (BEF) .

Dễ có B, J, O' thẳng hàng và $O'H \parallel OP$.

Ta chứng minh BJ là tiếp tuyến (I) .

Thật vậy, do $\angle PCM = \angle PAM = \angle AEM$ nên $PCME$ nội tiếp, do đó ta được $\angle EBJ = \angle EMJ = \angle JPC = 2\angle APM = 2\angle AYO = 2\angle ADJ = 2\angle AFB$ (*).

Suy ra JB là tiếp tuyến (I) , hay $O'B$ là tiếp tuyến (I) .

Tiếp theo ta chứng minh I thuộc trung trực MN .

Thật vậy, ta có $\angle IMN = \angle IME = \angle BAE + \angle JBE = \angle JBA + \angle JBE = \angle EBA = \angle ECA$. Tương tự ta có $\angle INM = \angle ADF$.

Mà theo (*) ta có $\angle ECJ = \frac{2\angle ADJ}{2} = \angle ADJ$ nên $AD \parallel EC$.

Tương tự $AC \parallel DF$ nên ta được $\angle ECA = \angle ADF$.

Do đó $\angle IMN = \angle INM$ nên ta được I thuộc trung trực MN .

Bây giờ gọi L là hình chiếu của I trên $O'H$ thì do $\angle IO'H = \angle O'OA = \angle OOB$ nên ta có $O'L$ đối xứng $O'B$ qua $O'I$.

Do đó $IL = IB$ và ta suy ra $O'H$ là tiếp tuyến (I) . Từ đó ta được đpcm.

Bài 3. Ký hiệu $\mathbb{Z}_{>0}$ là tập hợp các số nguyên dương. Một hàm số $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ được gọi là **tốt** nếu

$$b^a - f(b)^{f(a)} \text{ chia hết cho } f(a) (*)$$

với mọi số nguyên dương a và b .

Xác định số thực c nhỏ nhất sao cho $f(n) \leq cn$ với mọi hàm số tốt f và mọi số nguyên dương n .

Lời giải: Gọi $P(u, v)$ là phép thế $a = u, b = v$ vào (*).

Từ $P(a, a)$ ta được $f(a) | a^a$. Do đó $\forall p \in \mathbb{P}$ ta đều có $f(p) = p^k, k \in \mathbb{N}$.

Giả sử tồn tại x sao cho $f(x) \neq x$. Nếu tồn tại vô hạn p sao cho $f(p) > 1$ thì với những số p thỏa mãn $f(p) > 1$, từ $P(p, x)$ ta được $x^p - f(x)^{f(p)} : f(p) : p$.

Mà $x^p \equiv x \pmod{p}; f(x)^{f(p)} \equiv f(x) \pmod{p}$.

Do đó ta được $f(x) - x : p$ với mọi p thỏa mãn $f(p) > 1$.

Điều này là vô lý do ta đang giả sử p có vô hạn còn $f(x) - x$ là hằng số khác 0.

Do đó $f(p) = 1 \quad \forall p > M$ nguyên tố.

Ta chứng minh $f(p) = 1 \quad \forall p > 2$ nguyên tố.

Thật vậy, giả sử tồn tại p_0 nguyên tố lẻ thỏa mãn $f(p_0) > 1$ (1).

Theo định lý Dirichlet, tồn tại vô hạn số nguyên tố q dạng $tp_0 - 1$ ($t \in \mathbb{N}$).

Chọn q là số nguyên tố có dạng trên và thỏa mãn $q > M$.

Từ $P(p_0, q)$ ta được $q^{p_0} - f(q)^{f(p_0)} : f(p_0)$.

Mà $q > M$ nên $f(q) = 1$. Suy ra $q^{p_0} - f(q)^{f(p_0)} = q^{p_0} - 1 \equiv (-1)^{p_0} - 1 \equiv -2 \pmod{p_0}$.

Do đó $f(p_0)$ không chia hết cho p_0 nên mâu thuẫn với (1).

Vậy $f(p) = 1 \quad \forall p > 2$ nguyên tố.

Bây giờ ta chứng minh $f(a)$ là lũy thừa của 2 với mọi a nguyên dương.

Thật vậy, giả sử tồn tại a sao cho $f(a)$ có ước nguyên tố p . Khi đó $P(a, p)$ cho ta $f(a) | p^a - f(p)^{f(a)} = p^a - 1 \implies p | p^a - 1$, vô lý.

Do đó $f(a) = 2^k$ với mọi a nguyên dương ($k \in \mathbb{N}$) (2).

Tuy nhiên, do $f(a) | a^a$ nên với a lẻ thì $f(a)$ cũng lẻ, do đó $f(a) = 1$ với mọi a nguyên dương lẻ.

Vậy $P(a, 3)$ cho ta $f(a) | 3^a - f(3)^{f(a)} = 3^a - 1$ với mọi a nguyên dương (3).

Mà $v_2(3^a - 1) = v_2(3 - 1) + v_2(3 + 1) + v_2(a) - 1 = v_2(a) + 2$ với mọi a nguyên dương

chẵn.

Vì thế kết hợp với (2), (3) ta suy ra $f(a) \leq 4a \quad \forall a \in \mathbb{N}^*, a \text{ chẵn}$.

Suy ra $f(a) \leq 4a \quad \forall a \in \mathbb{N}^*$ (do $f(a) = 1$ với mọi a lẻ).

Tức là nếu tồn tại a sao cho $f(x) \neq x$ thì phải có $f(a) \leq 4a \quad \forall a \in \mathbb{N}^*$.

Còn nếu $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{N}^*$ thì hiển nhiên ta cũng có $f(a) \leq 4a \quad \forall a \in \mathbb{N}^*$.

Do đó trong mọi trường hợp ta đều có $f(a) \leq 4a \quad \forall a \in \mathbb{N}^*$.

Lại có hàm f_0 được xây dựng như sau:

$$f_0(a) = \begin{cases} 1, & a \text{ không là lũy thừa của } 2 \\ 2, & a = 2 \\ 4a, & a \text{ là lũy thừa của } 2 \end{cases}$$

thỏa mãn bài toán và có $f_0(a) = 4a$ với a là lũy thừa của 2. Do đó $c = 4$ là giá trị nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy $c = 4$ là giá trị cần tìm.

DAY 2

Bài 4. Một ước số thực sự của số nguyên dương N là ước nguyên dương khác N của N .

Cho $a_1, a_2, \dots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương sao cho mỗi số hạng có ít nhất ba ước số thực sự. Biết rằng với mọi $n \geq 1$, số hạng a_{n+1} bằng tổng của ba ước số thực sự lớn nhất của a_n . Xác định tất cả các giá trị có thể của a_1 .

Lời giải: Xét một số a_n bất kì.

Giả sử a_n lẻ, gọi $d_1 < d_2 < d_3$ là ba ước thực sự lớn nhất của a_n . Theo đề bài:

$$a_{n+1} = d_1 + d_2 + d_3 \leq \frac{a_n}{7} + \frac{a_n}{5} + \frac{a_n}{3} < a_n$$

Ngoài ra dễ thấy a_{n+1} lẻ do $d_1 + d_2 + d_3$ lẻ, nên ta có thể lặp lại quá trình trên và suy ra $a_n > a_{n+1} > a_{n+2} > \dots$. Do đó dãy (a_n) bắt đầu giảm từ a_n . Vì các số nguyên dương không thể giảm mãi nên dãy sẽ dừng, mâu thuẫn với tính chất dãy vô hạn.

Vậy a_n chẵn.

Giả sử $3 \nmid a_n$. Gọi $1, 2, a, b$ là 4 ước dương nhỏ nhất của a_n ($1 < 2 < a < b$; $3 \nmid a, b$). Ta được:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{a} + \frac{a_n}{b} < a_n \quad (1)$$

Nếu $4 \mid n$ thì ta được $a = 4$ và $a_{n+1} = a_n \cdot (3b + 4)$ không chia hết cho 3.

Nếu $4 \nmid n$ thì do a_{n+1} chẵn và $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{a_n}{a} + \frac{a_n}{b} = a_n \cdot \frac{ab + 2a + 2b}{2}$ nên ta được $2 \mid ab$.

Mà a là ước lẻ không tầm thường nhỏ nhất của a_n , do đó a là số nguyên tố và khi đó từ định nghĩa của b , ta có luôn $b = 2a$. Dẫn đến:

$$a_{n+1} = \frac{a_n(2a^2 + 2a + 4a)}{2} = a_n(a^2 + 3a) \Rightarrow 3 \nmid a_{n+1}$$

Do đó nếu $3 \nmid a_n$ thì ta cũng có $3 \nmid a_{n+1}$. Tương tự ta suy ra $3 \nmid a_m \forall m \geq n$

Tuy nhiên khi đó chứng minh như (1) ta lại suy ra dãy (a_n) bắt đầu giảm từ a_n . Vì thế lại suy ra vô lí.

Vậy ta phải có $3 \mid a_n$.

Tóm lại, ta có $6 \mid n \forall n \geq 1$.

Đặt $a_1 = 6t$ ($t \in \mathbb{N}^*$). Ta xét 2 trường hợp sau:

TH1: t lẻ

Giả sử $5 \mid t$. Đặt $t = 5u$ ($u \in \mathbb{N}^*$, u lẻ).

$$\Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_1}{5} = 15u + 10u + 6u = 31u \Rightarrow a_2 \text{ lẻ, mâu thuẫn.}$$

Do đó $5 \nmid t \Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_1}{6} = a_1 = 6t$.

Cứ tiếp tục như vậy ta được $a_n = 6t \forall n \geq 1$ (t/m).

TH2: t chẵn

Ta được $a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_1}{4} = \frac{13a_1}{12}$. Mà $6 \mid a_2 \Rightarrow 6 \cdot 12 \mid a_1 \Rightarrow 12 \mid t$.

Đặt $t = 12^k \cdot s$ với $k, s \in \mathbb{N}^*$, s không chia hết cho 12.

$$\Rightarrow a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{a_1}{3} + \frac{a_1}{4} = \frac{13a_1}{12} = 13 \cdot 6 \cdot 12^{k-1} \cdot s.$$

Cứ tiếp tục như vậy ta được $a_{k+1} = 13^k \cdot 6 \cdot s$.

Giả sử s chẵn, tương tự như t chẵn, ta sẽ suy ra s chia hết cho 12, vô lí.

Do đó s lẻ.

Giải tương tự TH1 ta suy ra $5 \nmid s$ thì thỏa mãn.

Kết hợp cả 2 trường hợp ta suy ra các giá trị a_1 thỏa mãn điều kiện bài toán là $a_1 = 6 \cdot 12^k \cdot s$ với $k, s \in \mathbb{N}, (s, 10) = 1$.

Bài 5. Alice và Bazza chơi trò chơi Úc, một trò chơi hai người mà luật chơi phụ thuộc vào một số thực dương λ mà cả hai người đều biết. Tại lượt thứ n của trò chơi (bắt đầu với $n = 1$), điều sau đây diễn ra:

- Nếu n là số lẻ, Alice chọn một số thực không âm x_n sao cho

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n.$$

- Nếu n là số chẵn, Bazza chọn một số thực không âm x_n sao cho

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n.$$

Nếu một người không chọn được một số x_n hợp lệ thì trò chơi kết thúc và người kia thắng cuộc. Nếu trò chơi kéo dài vô hạn thì không người nào thắng cuộc. Cả hai người đều biết tất cả các số đã được chọn.

Xác định tất cả các giá trị của λ sao cho Alice có chiến lược thắng cuộc và tất cả các giá trị của λ sao cho Bazza có chiến lược thắng cuộc.

Lời giải: Ta xét các trường hợp sau:

TH1: $\lambda > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta chứng minh A là người có chiến thuật thắng.

Thật vậy, ban đầu ở các lượt chơi của mình, A chọn $x_1 = 0, x_3 = 0, \dots$

Thì do $x_2 + x_4 + \dots + x_{2k} \leq \sqrt{k(x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{2k}^2)}$ nên nếu B có thể chọn được đến x_{2k} thì ta sẽ có $x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{2k}^2 \leq 2k$. Do đó $x_2 + x_4 + \dots + x_{2k} \leq k\sqrt{2} < 2k\lambda$.

Vì thế A cứ chọn $x_{2k+1} = 0$ là được.

Bây giờ, ta sẽ tìm chỉ số k_0 để đến lượt $2k_0+1$, A có thể chọn $x_{2k_0+1} = (2k_0+1)\lambda - k_0\sqrt{2} > 0$ sao cho B sẽ không thể chọn x_{2k_0+2} nữa.

Thật vậy, Với cách chọn x_{2k_0+1} như trên, ta sẽ có:

$$x_2 + x_4 + \dots + x_{2k_0} + x_{2k_0+1} \leq k_0\sqrt{2} + (2k_0+1)\lambda - k_0\sqrt{2} = (2k_0+1)\lambda$$

Do đó đây là luôn là lượt chơi hợp lệ của A , $\forall k_0$.

Tuy nhiên khi đó, $x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{2k_0}^2 + x_{2k_0+1}^2 > x_{2k_0+1}^2 = [(2k_0+1)\lambda - k_0\sqrt{2}]^2$.

Và do $\lim_{k \rightarrow +\infty}([(2k+1)\lambda - k\sqrt{2}]^2 - 2(k+1)) = +\infty$ nên tồn tại k_0 sao cho

$$[(2k_0+1)\lambda - k_0\sqrt{2}]^2 > 2(k_0+1)$$

Do đó với giá trị k_0 này, B không thể tiếp tục chọn được x_{2k_0+2} nữa.

Ta được A thắng.

TH2: $\lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta chứng minh B là người có chiến thuật thắng.

Thật vậy, ở lượt thứ nhất, A chọn x_1 thỏa mãn $x_1 \leq \lambda$ thì B chọn $x_2 = \sqrt{2 - x_1^2} \geq 0$.

Với mỗi $k \geq 1$, nếu tới lượt $2k + 1$, A vẫn có thể thực hiện lượt chơi của mình, thì ở lượt tiếp theo, B chọn $x_{2k+2} = \sqrt{2 - x_{2k+1}^2}$. Ta chứng minh cách chọn này luôn thỏa mãn.

Do cách chọn của B , ta có $x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2 = 2 \forall i = \overline{1, k}$.

Và ta có $x_{2i-1} + x_{2i} \geq \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} = \sqrt{2} > 2\lambda \forall i = \overline{1, k} (*)$

Kết hợp $x_1 + x_2 + \dots + x_{2k+1} \leq (2k + 1)\lambda$ ta suy ra $x_{2k+1} \leq \lambda < \sqrt{2}$.

Do đó $x_{2k+2} > 0$ nên cách chọn trên của B thỏa mãn.

Ta chứng minh đến một lúc nào đó A sẽ không chọn được nữa.

Thật vậy, do cách chọn trên thì từ $(*)$ ta luôn có:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2k+1} \geq k\sqrt{2}$$

Mà với k đủ lớn thì ta có $k\sqrt{2} - (2k + 2)\lambda > 0$. Do đó A không thể chọn được x_{2k+2} nữa. Ta được B thắng.

TH3: $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ta chứng minh không ai có chiến thuật thắng.

Thật vậy, theo TH1 thì ở các lượt chẵn của mình, A chỉ cần chọn $x_1 = 0, x_3 = 0, \dots$

Do $x_2 + x_4 + \dots + x_{2k} \leq \sqrt{k(x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{2k}^2)}$ nên nếu B có thể chọn được đến x_{2k} thì ta sẽ có $x_2^2 + x_4^2 + \dots + x_{2k}^2 \leq 2k$. Do đó $x_2 + x_4 + \dots + x_{2k} \leq k\sqrt{2} = 2k\lambda$.

Vì thế A cứ chọn $x_{2k+1} = 0$ như TH1 là sẽ thỏa mãn.

Còn với B , ở lượt thứ nhất, A chọn x_1 thỏa mãn $x_1 \leq \lambda < \sqrt{2}$ thì B chọn $x_2 = \sqrt{2 - x_1^2}$.

Với mỗi $k \geq 1$, nếu tới lượt $2k + 1$, A vẫn có thể thực hiện lượt chơi của mình, thì ở lượt tiếp theo, B chọn $x_{2k+2} = \sqrt{2 - x_{2k+1}^2}$. Ta chứng minh cách chọn này luôn thỏa mãn.

Do cách chọn của B , ta có $x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2 = 2 \forall i = \overline{1, k}$.

Và ta có $x_{2i-1} + x_{2i} \geq \sqrt{x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2} = \sqrt{2} = 2\lambda \forall i = \overline{1, k} (*)$.

Kết hợp $x_1 + x_2 + \dots + x_{2k+1} \leq (2k + 1)\lambda$ ta suy ra $x_{2k+1} \leq \lambda < \sqrt{2}$.

Do đó $x_{2k+2} > 0$ nên cách chọn trên của B thỏa mãn.

Vậy không ai là người có chiến thuật thắng trong trường hợp này.

Tóm lại, nếu $\lambda > \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì A là người có chiến thuật thắng, nếu $\lambda < \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì B là người có

chiến thuật thắng, nếu $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì không ai có chiến thuật thắng

Bài 6. Cho một bảng ô vuông kích thước 2025×2025 . Matilda muốn đặt lên bảng một số viên gạch hình chữ nhật, kích thước có thể khác nhau, sao cho mỗi viên phủ kín một số ô vuông đơn vị của bảng và mỗi ô vuông đơn vị được phủ bởi không quá một viên.

Xác định số nhỏ nhất các viên gạch mà Matilda cần đặt sao cho trên mỗi hàng cũng như trên mỗi cột của bảng có đúng một ô vuông đơn vị không được phủ bởi các viên gạch.

Lời giải: Đầu tiên ta có bổ đề sau: Cho dãy số $x_1, x_2, \dots, x_n$ và a là độ dài của dãy con tăng dài nhất, b là độ dài của dãy con giảm dài nhất thì $ab \geq n$ và khi $a \cdot b = n$ thì 2 tập này có 1 phần tử chung.

Chứng minh: Với mỗi phần tử x_k trong dãy (tại vị trí k), ta gán cho nó một cặp tọa độ (i_k, j_k) , trong đó:

- i_k là độ dài của dãy con tăng dài nhất kết thúc tại chính phần tử x_k .
- j_k là độ dài của dãy con giảm dài nhất kết thúc tại chính phần tử x_k .

Ta sẽ chứng minh rằng tất cả n cặp tọa độ (i_k, j_k) này là phân biệt. Giả sử tồn tại hai phần tử x_k và x_l với vị trí $k < l$ nhưng lại có cùng cặp tọa độ: $(i_k, j_k) = (i_l, j_l)$. Ta xét hai trường hợp:

• **Trường hợp 1:** $x_k \leq x_l$

Vì $x_k \leq x_l$, ta có thể thêm x_l vào cuối dãy con tăng dài nhất kết thúc tại x_k (độ dài là i_k) để tạo ra một dãy con tăng mới kết thúc tại x_l . Dãy mới này sẽ có độ dài ít nhất là $i_k + 1$. Do đó, độ dài của dãy con tăng dài nhất kết thúc tại x_l phải thỏa mãn $i_l \geq i_k + 1$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu là $i_l = i_k$.

• **Trường hợp 2:** $x_k > x_l$

Tương tự, vì $x_k > x_l$, ta có thể thêm x_l vào cuối dãy con giảm dài nhất kết thúc tại x_k (độ dài là j_k) để tạo ra một dãy con giảm mới kết thúc tại x_l . Dãy mới này sẽ có độ dài ít nhất là $j_k + 1$. Do đó, độ dài của dãy con giảm dài nhất kết thúc tại x_l phải thỏa mãn $j_l \geq j_k + 1$. Điều này cũng mâu thuẫn với giả thiết ban đầu là $j_l = j_k$.

Vì mọi trường hợp đều dẫn đến mâu thuẫn nên điều giả sử sai. Vậy, tất cả n cặp tọa độ (i_k, j_k) phải là duy nhất.

Ta có a là độ dài dãy con tăng dài nhất của toàn bộ dãy, nên $1 \leq i_k \leq a$ với mọi k . Tương tự b là độ dài dãy con giảm dài nhất của toàn bộ dãy, nên $1 \leq j_k \leq b$ với mọi k . Số lượng các cặp tọa độ (i, j) duy nhất có thể có là $a \cdot b$.

Ta có n phần tử, tương ứng với n cặp tọa độ duy nhất. Nên theo nguyên lí Dirichlet thì $n \leq ab$.

Khi $ab = n$, điều này có nghĩa là số lượng phần tử trong dãy đúng bằng số lượng các cặp tọa độ có thể có. Do đó, với mọi cặp số nguyên (i, j) thỏa mãn $1 \leq i \leq a$ và $1 \leq j \leq b$, phải tồn tại duy nhất một phần tử trong dãy được gán với cặp tọa độ (i, j) .

- Hãy xem xét tập hợp các phần tử có tọa độ dạng $(i, 1)$ với i chạy từ 1 đến a . Các phần tử này, khi được sắp xếp theo đúng thứ tự xuất hiện trong dãy ban đầu, sẽ tạo thành một dãy con tăng có độ dài a là dãy con tăng dài nhất.
- Tương tự, hãy xem xét tập hợp các phần tử có tọa độ dạng $(1, j)$ với j chạy từ 1 đến b . Các phần tử này, khi được sắp xếp theo đúng thứ tự xuất hiện, sẽ tạo thành một dãy con giảm có độ dài b . Đây chính là một dãy con giảm dài nhất.

Cả hai dãy con này đều chứa phần tử có tọa độ $(1, 1)$. Do đó, khi $ab = n$, tồn tại một dãy con tăng dài nhất và một dãy con giảm dài nhất có chung một phần tử.

Bây giờ quay trở lại bài toán, coi các ô vuông chưa được che phủ là một hoán vị, áp dụng bổ đề trên thì ta có một đường thẳng đi qua a ô tính từ góc dưới cùng bên trái lên góc trên cùng bên phải và ngược lại với b ô tính từ trên cùng bên trái xuống dưới cùng bên phải (tương đương với dãy con tăng và giảm dài nhất) khi đó nếu $ab = n^2$ thì 2 đường thẳng này giao nhau ở đúng 1 ô.

Để ý rằng 2 đường thẳng này chia toàn bộ ô vuông lớn thành 4 phần, ta gọi lần lượt là phần trên, phần dưới, phần trái và phần phải. Đối với các ô vuông ở phần trên, ta tô màu cạnh trên, và cứ tiếp tục như vậy cho 3 phần còn lại.

Mặt khác đối với các ô vuông a, b sẽ nằm ở 2 phần khác nhau nên đối với các ô vuông a , nếu chúng nằm giữa phần dưới và phần trái, hãy tô màu cho cả cạnh dưới và cạnh trái, và nếu chúng nằm giữa phần trên và phần phải, hãy tô màu cho cả cạnh trên và cạnh phải. Tương tự như vậy đối với các ô vuông b từ trên cùng bên trái xuống dưới cùng bên

phải. Và nếu có hình vuông chung ở cả 2 đường thẳng thì ta sẽ tô màu lên cả 4 cạnh của hình vuông đó.

Do có n^2 ô tổng cộng nên ta tô màu ít nhất $n^2 + a + b$ cạnh. Nếu $a = b$ thì có một ô giao nhau bị tính hai lần, nên người ta tô màu thêm 1 cạnh (ô đó đã được tô màu "thêm" (một cho dây con tăng dài nhất, một chỗ cho dây con giảm dài nhất) nhưng có thể trùng nhau về cùng một cạnh (ví dụ cả hai đều chọn cạnh trên của ô chung)).

Như vậy, trong thực tế ta chỉ có một cạnh được tô màu, không phải hai) vì vậy nên chúng ta chỉ cộng 1.

Ta thấy rằng mỗi hình chữ nhật chỉ chạm tối đa một cạnh được đánh dấu, và ngoại trừ 4 cạnh ngoài cùng của hình vuông lớn, tất cả các cạnh còn lại đều phải được chạm bởi một hình chữ nhật. Do đó, ta cần ít nhất

$$n^2 + a + b + 1 - 4 \geq n^2 + 2n + 1 - 4 = n^2 + 2n - 3$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = n$.

Áp dụng khi $n = 45$ thì ta cần ít nhất 2112 hình chữ nhật.